

Ispit iz Matematike 1, Hemija, jun 2012.

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$.
- 2.(10 poena) Naći vertikalnu asimptotu funkcije $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$.
- 3.(10 poena) Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - y' - 6y = 6x$, ako se zna da je partikularno rešenje oblika $y_p = Ax + B$.
- 5.(10 poena) Izračunati $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$.
- 6.(10 poena) U kutiji se nalaze tri ispravna novčića i jedan defaktni novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca dva puta. Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.

Ispit iz Matematike 1, Hemija, jun 2012.

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$.
- 2.(10 poena) Naći vertikalnu asimptotu funkcije $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$.
- 3.(10 poena) Naći prvi izvod funkcije $f(x) = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - y' - 6y = 6x$, ako se zna da je partikularno rešenje oblika $y_p = Ax + B$.
- 5.(10 poena) Izračunati $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$.
- 6.(10 poena) U kutiji se nalaze tri ispravna novčića i jedan defaktni novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca dva puta. Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.

Rešenje:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \text{Lopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(1+x)^4 - 5}{2x + 5x^4} = \text{Lopital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20(1+x)^3}{2 + 20x^3} = 10.$

2. Domen funkcije $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$ je:

$4-x^2 \geq 0$ i $x \neq 0$. Odnosno $x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$. Vertikalnu asimptotu tražimo u tački 0 :

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x} = 2 - \infty = -\infty$, pa $x = 0$ jeste vertikalna asimptota sa leve strane.

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x} = 2 + \infty = +\infty$, pa $x = 0$ jeste vertikalna asimptota sa desne strane.

3. $f'(x) = (\arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}})' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{2}}} \cdot (\frac{1-x}{\sqrt{2}})' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2-1+2x-x^2}{2}}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$

4. Nađimo rešenje odgovarajuće homogene jednačine $y'' - y' - 6y = 0$. Rešenja karakteristične jednačine $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ su 3 i -2 pa je rešenje oblika:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Dalje je $y'_p = A$ i $y''_p = 0$, pa iz $-A - 6(Ax + B) = 6x$ dobijamo:

$$A = -1 \text{ i } B = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Najzad: } y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - x + \frac{1}{6}.$$

5. $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx =$

parcijalno, $u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$, i $dv = x^2, v = \frac{x^3}{3} dx$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 =$$

$$\frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3}) \Big|_1^2 = \frac{8 \ln 2}{3} - \frac{7}{9}.$$

6.

H_1 : Iz kutije je izabran ispravan novčić.

H_2 : Iz kutije je izabran novčić sa dva grba.

A: Oba puta je pao grb.

Po formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{7}{16}.$$